Formulierung einer relativistisch invarianten Definition der Energie von Gravitationswellen - ein unerwarteter Zusammenhang zur Quantenmechanik

Von Torsten Pieper

Mannheim 11. November 2013

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung einer relativistisch invarianten Energie-Definition für lineare Gravitationswellen. Hierbei ergibt sich ein überraschender Zusammenhang zwischen eben diesen linearen Gravitationswellen und der ebenfalls linearen Quantenmechanik. Es zeigt sich, dass die Einsteinsche Gleichung E=h*f der Quantenhypothese kein Postulat mehr ist, sondern aus dem Zusammenhang zwischen Raumzeit-Krümmung und Energiedichte aus der Allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet werden kann. Dies ist ausschließlich im Rahmen der ART möglich, da die Divergenzen der drei anderen Wechselwirkungen andersgearteten Ladungen proportional sind und nicht zur Definition von Energie herangezogen werden können.

Paradoxerweise hat somit die Gravitation, entgegen aktueller Lehrmeinung, einen innigeren Zusammenhang zur Quantenmechanik als alle anderen Kräfte!

Energie linearer Gravitations-Wellen

Jeder wird darin übereinstimmen, dass Gravitationswellen Energie durch den Raum transportieren. Dies zeigt sich nicht zuletzt bei der Beobachtung von astronomischen Objekten, etwa eng stehenden Binärpulsaren und der Tatsache, dass in solchen Fällen ein Energieverlust ersichtlich wird. Dieser Energieverlust lässt sich im Rahmen der ART durch Gravitationswellen eindeutig berechnen, auch wenn ein direkter Nachweis solcher Wellen noch aussteht.

Lineare Gravitationswellen folgen aus einer Betrachtung in der unter anderem die Selbstwechselwirkung der Gravitation vernachlässigt wird. Weiterhin wird für gewöhnlich ihr Verlauf auf einer flachen Hintergrundmetrik betrachtet und ihre Amplitude gering angesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen können Gravitationswellen mit einer normalen homogenen Wellengleichung beschrieben werden[1].

$$e(x,t) = F_0 \times e^{(i \times (\omega \times t - k \times x))}$$

In dieser Form sind die Wellen, ähnlich dem newtonschen Gravitationsfeld, als Feld im Raum darstellbar, mit den ungestörten Koordinaten x,y,z und t, der Amplitude F_0, der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k.

Die Frage ist nun, wie sich die Energie einer Gravitationswelle berechnen lässt. Es gibt im Wesentlichen zwei Ansätze. Wie die anderen Wechselwirkungen ist die Gravitation quadratisch in ihrer ersten Ableitung, sie ist aber auch linear in ihrer zweiten Ableitung[2].

Analog zur elektromagnetischen Welle lässt sich eine Energiedichte über den Betrag des Beschleunigungsvektors g definieren:

$$w(g) = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \times g^2/(4 \times \pi \times \gamma)$$

Dieser Ausdruck lässt sich sehr einfach aus der gravitativen Bindungsenergie eines Körpers bereits anhand des newtonschen Gesetzes ableiten.

Dieser Ansatz kann aber nicht zielführend sein:

Durch Wechsel des Koordinatensystems lässt sich der Beschleunigungs-Vektor g bzw. das damit verbundenen Christoffel-Symbol lokal wegtransformieren, damit ist auch der Ausdruck w(g) nicht invariant.

Die andere Möglichkeit folgt aus der linearen Einstein-Gleichung im Rahmen der ART. Ganz allgemein ist die zweite Ableitung der Gravitation, die Krümmung der Raum-Zeit, einer Energie- bzw. Impulsdichte proportional. Die explizite Beschreibung mit Tensor-Komponenten ist zwar immer noch vom Bezugsystem abhängig aber der Tensor und seine Verjüngung stellen Invarianten dar.

Für eine freie homogene Wellengleichung gilt, dass ihre Viererdivergenz verschwindet. Betrachtet man die Dreierdivergenz und die zeitliche Ableitung getrennt, ist es möglich die in der ART übliche Proportionalität zwischen Raumzeit-Krümmung und Energiedichte als für den Energietransport der Welle ursächlich aufzufassen.

Streng genommen müsste hierzu die kovariante Ableitung der Metrik definiert werden. Hier kann jedoch darauf verzichtet werden, da die Störung $h_{\mu\nu}$ der Metrik ausgehend von der Form[3]

$$g_{\mu n} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

von der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ separiert werden und damit als Feld in der Minkowski-Raumzeit und in Abhängigkeit von globalen Koordinaten x,y,z,t dargestellt werden kann.

Die Krümmung wird für die folgenden Betrachtungen also umdefiniert als zweite Ableitung des Störungsterms $h_{\mu\nu}$ in Abhängigkeit der Koordinate x des ungestörten Minkowski-Raumes.

Es wird hierzu im Folgenden der Realteil der Wellenfunktion mit der Amplitude F_0 (Platzhalter für die Störung der Metrik $h_{\mu\nu} \ll 1$ als Koeffizient) betrachtet:

$$e(x,t) = F_0 \times e^{(i \times (\omega \times t - k \times x))}$$

$$e_R(x,t) = F_0 \times \cos(\omega \times t - k \times x)$$

$$e'_R(x,t) = -1 \times F_0 \times (-k) \times \sin(\omega \times t - k \times x)$$

$$e''_R(x,t) = -1 \times F_0 \times k^2 \times \cos(\omega \times t - k \times x)$$

Durch Gleichsetzung der Krümmung der Wellenfunktion mit dem Ausdruck aus der linearisierten ART[4]

$$e_R'' = R_{tx}$$

$$R_{tx} = -4 \times \pi \times \frac{\gamma}{c^4} \times w \times \frac{v}{c} = -4 \times \pi \times \frac{\gamma}{c^4} \times w \times \frac{c}{c}$$

ergibt sich eine orts- und zeitabhängige Energiedichte

$$w(x,t) = \frac{E}{V} = F_0 \times k^2 \times c^4/(4 \times \pi \times \gamma) \times \cos(\omega \times t - k \times x)$$

Die Energie-Dichte wird durch Integration über x in den Grenzen 0 bis λ zu einer Energie-Flächendichte

$$W(x,t)/A = F_0 \times k \times c^4/(4 \times \pi \times \gamma) \times \sin(\omega \times t - k \times x)$$

Um zu einem Ausdruck zu kommen dessen Gesamtbetrag ungleich Null ist muss naturgemäß der positive Betrag zwischen Phase 0 und π/2 vierfach eingehen. Physikalisch ausgedrückt definiert man die Krümmung immer als positiv relativ zu $\eta_{\mu\nu}$.:

$$\frac{W}{A} = 4 \times F_0 \times k \times \frac{c^4}{4 \times \pi \times \gamma} = F_0 \times k \times \frac{c^4}{\pi \times \gamma} = F_0 \times \frac{2 \times c^4}{\gamma \times \lambda}$$

Dieser Ausdruck ist bereits proportional zum Kehrwert der Wellenlänge und damit prop. zur Frequenz.

Nun sind Dichtewerte aufgrund der Stetigkeit von Raum und Zeit als punktuell zu betrachten, d.h. sie haben die Ausdehnung oder auch Reichweite Null.

Allgemein muss die Energie-Flächendichte über eine Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung integriert werden, welche man versuchsweise als Vielfaches der Planckfläche definieren kann. Das setzt natürlich voraus, dass eine Quantengravitation sinnvoll entwickelt werden kann.

Für den vorliegenden Fall wird über eine Fläche integriert, welche eine Kreisfläche mit dem Radius vom Betrag einer Plancklänge darstellt:

$$A = A_0 \times \pi = \pi \times \hbar \times \gamma / c^3$$

$$W = F_0 \times \frac{2 \times c^4}{\gamma \times \lambda} \times \pi \times \hbar \times \gamma / c^3$$

$$W = F_0 \times 2\pi \times \hbar \times c/\lambda$$

$$W = F_0 \times h \times \frac{c}{\lambda} = F_0 \times h \times f$$

Hier ergibt sich ein unerwarteter Zusammenhang!

Bis auf einen Amplituden-Faktor F_0 ist das Ergebnis identisch mit der Formel zur Energie-Quantelung aus der Quantenmechanik.

Damit ist die Proportionalität von Energie und Frequenz nicht länger ein reines Postulat, sondern eine Folge der Proportionalität von Raumzeit-Krümmung und Energiedichte im Rahmen der ART.

Man könnte nun einwenden, dass das Ergebnis vorhersehbar war, da die Planckfläche aus einer Kombination von Quantenmechanik und ART folgt:

$$\lambda\!\!\!^{-}_c \times R_G = \frac{\hbar}{m \times c} \times \gamma \times \frac{m}{c^2} = \frac{\hbar \times \gamma}{c^3} = A_0$$

Dennoch ist die vorliegende Herleitung die einzige, mit welcher die Energie-Frequenz-Relation eindeutig hergeleitet werden kann. Die Divergenzen (Krümmungen) aller anderen konservativen Felder führen zu Ladungs- bzw. Stromdichten und können daher nicht zur Definition einer Energie herangezogen werden. Ihre Energiedichten hingegen sind proportional zur ersten Ableitung ihrer Potentiale:

$$\text{z.B. } w = {}^{1}\!/_{2} \times \varepsilon_0 \times E^2 + {}^{1}\!/_{2} \times {}^{1}\!/_{\mu_0} \times B^2 = \varepsilon_0 \times E^2$$

$$E^2(x,t) = E_m^2 \times \cos(\omega \times t - k \times x)^2$$

Es muss über das Quadrat der Kosinus-Funktion integriert werden:

$$\int \cos(-k \times x)^2 \times dx = x/2 + \sin(-2 \times k \times x)/(-4 \times k)$$

Das Integral über eine Wellenlänge führt zu:

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\sin\left(4 \times \frac{\pi}{\lambda} \times \lambda\right)}{-4 \times k} = \frac{\lambda}{2} + 0 = \frac{\lambda}{2}$$

$$W/A = \varepsilon_0 \times E_m^2 \times \lambda/2$$

Auch nach dem Flächenintegral über A_0 gibt es keinen Zusammenhang mit der Energie-Frequenz-Relation nach Planck. Die Energie nimmt mit der Wellenlänge zu statt ab!

Während der Entwicklung der ersten quantenmechanischen Formeln zur Schwarzkörperstrahlung wurde die Energie-Frequenz-Relation von Max Planck empirisch eingeführt.

Später zeigte es sich, dass sie für jede beliebige Form der Energie gilt, unabhängig von der Struktur oder ihrer Herkunft. Der daraus folgende Welle-Teilchen-Dualismus verknüpft die Intensität einer Welle mit einer Partikel- hier Photonenstromdichte:

$$I = \varepsilon_0 \times E_m^2 \times \mathrm{c} = \mathrm{h} \times \mathrm{f} \times \mathrm{n} = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} \times \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = [\mathrm{Watt/m^2}]$$

n = [$1/m^2$/s] Anzahl der Photonen der Energie h×f welche pro Sekunde durch eine Fläche strömen.

Aus der heuristischen Herleitung der Schrödingerschen Wellengleichung folgt, dass der Ausdruck für die Energiedichte einer Partikeldichte proportional ist. Sie beschreibt eine Wahrscheinlichkeit dafür Photonen am entsprechenden Ort anzutreffen. Dies gilt auch für ein einzelnes Photon, was zu schwierigen philosophischen Implikationen führt.

In der Schrödinger-Gleichung und besser sichtbar in der Herleitung der Dirac-Gleichung taucht nun der Ausdruck für die (gravitative!) Energiedichte indirekt wieder auf. Die Energie eines quantenmechanischen, relativischen Systems genügt der Klein-Gordon-Gleichung[5]:

$$(i \times \hbar \times \mathrm{d/dt})^2 \times \Psi(\mathrm{r,t}) = -c^2 \times \hbar^2 \times \Delta\Psi(\mathrm{r,t}) + \mathrm{m}^2 \times \mathrm{c}^4 \times \Psi(\mathrm{r,t})$$

Der Ausdruck $c^2 \times \hbar^2 \times \Delta\Psi(r,t)$ entspricht der kinetischen Energie $(c \times p)^2$ eines Teilchens, berechnet sich aber aus der Divergenz (Krümmung) der Wellenfunktion, genau wie schon bei der Betrachtung von Gravitationswellen und der Ableitung der Energie-Frequenz-Relation angesetzt. Da diese Wellen keine Ruhmasse besitzen, kann die Energie über den reinen Impuls berechnet werden, genauso wie bei Photonen.

Das Auftauchen der Planck-Fläche ist an dieser Stelle nicht so interessant wie die Tatsache, dass aus dem Ansatz über die Krümmung die Relation zwischen Energie und Frequenz folgt.

Paradoxerweise hat somit die Gravitation, entgegen aller Lehrmeinung, einen innigeren Zusammenhang zur Quantenmechanik als alle anderen Kräfte! Das Problem – mit den Verfahren der Standardtheorie der Elementarteilchen lässt sich die Gravitation nicht quantisieren – ist weniger physikalischer als vielmehr mathematischer Natur!

Ausblick

Die Folgen für das Verständnis der Elementarteilchen und der Weiterentwicklung der Quantenfeld-Theorie

Wie schon erwähnt gilt die Energiequantelung für jede beliebige Form der Energie, unabhängig von Struktur oder Herkunft. Was für Folgen hat die Herleitung der Energie-Frequenz-Proportionalität aus der Krümmungs-Energiedichte-Proportionalität für das Verständnis der elementaren Wechselwirkungen und der Elementarteilchen?

Man könnte zunächst einfach sagen, dass ein beliebiger physikalischer Vorgang eine phasengleiche elementare Anregung der Raumzeit induziert. Dies wäre ein rein phänomenologischer Zusammenhang.

Man könnte auch noch einen Schritt weitergehen und damit eventuell einen Hinweis für die Entwicklung einer TOE (Theory of Everything) erhalten. Unterstellt man einen strukturellen(!) Zusammenhang zwischen gravitativen Vorgängen und solchen der Quantenfeld-Theorien, so repräsentiert ausschließlich die angenommene elementare Gravitationswelle die Gesamt-Energie des entsprechenden Vorgangs.

Dieser Ansatz könnte auf eine Theorie weisen, welche sämtliche Eigenschaften der physikalischen Welt als rein geometrische Eigenschaften erklärt. Wenn etwa eine fünfdimensionale Theorie vom ursprünglichen Kaluza-Klein-Typ das elektromagnetische Feld als Anregung der fünften Dimension erklärt, so müsste diese Anregung von einer vierdimensionalen Anregung begleitet sein. Eine ausschließliche Anregung der fünften Dimension ohne vierdimensionale, also gravitative, Anteile hätte gemäß unserem Verständnis weder Energie noch Masse.

Wie Einstein, Infeld und Hoffmann 1938 nachwiesen, können die mechanischen und gravitativen Eigenschaften eines Objekts allein im Rahmen der ART beschrieben werden[6]. Die nichtmechanischen Eigenschaften der Materie, egal ob elektromagnetische oder solche der Kernkräfte, müssen dann wohl in höheren Dimensionen gesucht werden, sofern der Einsteinsche Gedanke der völligen Geometriesierung der Physik weiterverfolgt werden kann.

Quellen-Verzeichnis

[1] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 26-28

[2] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 13

[3] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 22

[4] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 20

[5] N. Borghini Elementarteilchenphysik - Relativistische Quantenmechanik: Seite 21

[6] Albert Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann: *The Gravitational Equations and the Problem of Motion*. Annals of Mathematics Second series 39 (1): S. 65–100, 1938