Die Thermodynamik Schwarzer Löcher nach Hawking und Bekenstein

Die Thermodynamik schwarzer Löcher folgt aus einer semiklassischen Herleitung, bei der Partikelfelder auf einer gekrümmten Raumzeit betrachtet werden. Es wird in Folge angenommen, dass dieser Ansatz zumindest annähernd korrekt ist.

Die Bekenstein-Hawking-Entropie

$$S = \frac{k_b}{4} \times \frac{A}{A_0} = \frac{k_b}{4} \times 4 \times \pi \times R_s^2 / A_0$$

ist hier proportional dem Flächeninhalt des Ereignishorizonts und wird durch Vergleich mit der bekannten Planckfläche berechnet.

Die Entropie ist ein Maß für die Menge von Mikrozuständen welche zum selben Makrozustand führen. Eine Interpretation lautet, dass die Anzahl möglicher Bit-Zustände auf dem Ereignishorizont diesen Mikrozuständen entsprechen.

Allerdings gibt es bis heute keinen Hinweis, was die Mikrozustände sein könnten. Hierzu wird im folgenden Kapitel, anhand der Quantisierung der inneren Struktur Schwarzer Löcher gemäß meiner vorherigen Arbeit, eine schlüssige Interpretation geliefert.

Die Interpretation der Mikrozustände durch die Quantisierung Schwarzer Löcher

Aus der Eigenart Schwarzer Löcher, dass der Ereignishorizont immer zunimmt wurde eine Analogie zum thermodynamischen Konzept der Entropie aufgestellt.Später wurde daraus abgeleitet, dass Schwarze Löcher eine endliche Temperatur haben und Strahlung mit thermischem Spektrum emittieren.

Was fehlt ist eine Interpretation welcher Art die Mikrozustände sind, welche zum selben Makrozustand führen!

In der Thermodynamik ist es so, dass Temperaturunterschiede in einem geschlossenen System sich mit der Zeit ausgleichen, womit die Entropie maximal wird.Hier sind die Mikrozustände damit identifiziert, dass zuguterletzt alle Teilchen mit der Zeit dieselbe Energie annehmen und somit ununterscheidbar werden.

Um diesen Vorgang umzukehren muss zusätzlich Energie in das System eingebracht werden, was wiederum die Gesamtentropie erhöht.

Allgemein ausgedrückt verteilt sich die Gesamtenergie im ganzen System gleichförmig. Zunahme der Entropie kann allgemein als Resultat einer "Gleichverteilung der Energie" auf die Teile des Systems verstanden werden. Quantenphysikalisch ausgedrückt nehmen alle Teilchen denselben Grundzustand an.

Im Rahmen der ART kann diese "Gleichverteilung der Energie" mit der Richtungsunabhängigkeit der Gravitation verglichen werden,insbesondere mit der Richtungsunabhängigkeit der von einem statischen Schwarzen Loch verursachten Krümmung der Raum-Zeit. Es wirkt inalle Richtungen gleich stark. Es ist theoretisch vorstellbar, dass diese Krümmung sich zuerst ungleichmäßig einstellt. Dabei käme es jedoch zur Herausbildung lokaler Extrema. Diese sind jedoch, allgemein ausgedrückt, Quellen von Gravitationswellen und bauen sich so mit der Zeit ab bis sich überall der gleiche Zustand einstellt.

Krümmungen der Raum-Zeit sind im Prinzip Energiedichten proportional. Es handelt sich somit wieder um eine Gleichverteilung von Energie, diesmal konstant über Äquipotential-Flächen.

Die Entropie klassischer Schwarzer Löcher lässt sich wegen grundsätzlichen Eigenarten der ART dennoch nicht verstehen:

1)Schwarze Löcher sind Vakuum-Lösungen, die Divergenz des Felds verschwindet im gesamten Raumbereich, außer in der Singularität. Krümmungen sind nur dort Energien proportional wo die Divergenz nicht verschwindet.

2)Die Singularität hat keine Freiheitsgrade mit denen sich Entropie verstehen ließe

3)Die ART ist kontinuierlich. Die Fläche des EH ist wohldefiniert, auch das Flächenintegral über die Feldverteilung, jedoch ist die Anzahl der Flächenelemente dA abzählbar unendlich. Was dazu führt, dass unendlich viele Energieportionen sich auf unendlich viele Flächenelemente verteilen müssten.

Diese Probleme verschwinden mit der Quantisierung der ART:

Der Zusammenhang zwischen Krümmung und Energiedichte ergibt jetzt Sinn, da die Masse des quantisierten Schwarzen Lochs über seinen gesamten Innenraum verteilt ist.

Der Ereignishorizont ist quantisiert und definiert so eine endliche Zahl von „Raumzellen“ der Tiefe 1*lp, so dass nur die Anzahl der Flächenelemente in die Rechnung eingeht.

Die sich einstellenden Energiedichten lassen sich so verstehen, dass ab einem Grenzwert der Dichte weitere Energie auf die „nächsthöhere Schale“ des Schwarzen Lochs verdrängt wird und sich im Allgemeinen dort gleichmäßig verteilt, sich dabei aber radial immer über eine Plancklänge verteilt. Daher nimmt die Dichte mit $4\pi*n^2$ ab.

Vergleicht man das mit einem Atom-Modell ergibt sich folgendes Bild:

1) Jede Schale kann nur eine endliche Menge Energie vom Betrag ½ E0 aufnehmen.

2) Jede Schale hat n^2 mögliche Zustände, wie die Energie sich verteilen kann

Die Gesamtfläche des EH ist gemäß meiner Herleitung

$$4 \times \pi \times \left(2 \times l_p\right)^2 \times n_h^2 = 4 \times \pi \times l_p^2 \times n_i^2$$

Die Anzahl der Flächenelemente des EH ist offensichtlich das Quadrat der Abschnittsmenge des quantisierten Gravitations-Radius.

Vergleicht man Ereignishorizonte miteinander unterscheiden sich diese nur um den Faktor n_i^2.

Die Entropie ist somit der absoluten Elemente-Zahl n_i^2 proportional. Der Normierungsfaktor bestimmt sich aber über die quantisierte Grundgleichung der ART zu $16\pi*lp^2$.

Der normierte Ereignishorizont ergibt sich hier automatisch zu ¼ n_i^2.

Die Anzahl der Mikrozustände definiert sich dann darüber, wie sich die Schalen-Energie E auf die Flächenzellen (Volumenzellen der Tiefe 1*lp) verteilt.

Sie könnte in nur einer Zelle konzentriert sein, oder in 2, 3 usw. bis $N=n^2$ Zellen.

Diese Zustände korrelieren mit der theoretischen Möglichkeiten lokaler Extrema der Krümmung auf dem Ereignishorizont, wie im Rahmen der klassischen ART beschrieben (inklusive des Ausgleichs über Gravitations-Wellen).

Die Gleichverteilung der Energie ist der wahrscheinlichste Zustand und maximiert die Entropie.

Neben der thermodynamischen Definition ist eine statistische Definition der Entropie durch die Gleichung $S = k_B Ln(W)$ gegeben.

Dabei bezeichnet W die Wahrscheinlichkeit, dass das System in seinem Zustand realisiert ist. Nun stellt sich natürlich die Frage, wie diese Wahrscheinlichkeit definiert ist. Welche Alternativen müssen berücksichtigt werden, so dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten den Wert eins ergibt? Dies ist die Frage nach der absoluten Definition der Entropie. Es wird jedoch später ersichtlich, dass diese Frage nach der absoluten Definition der Entropie sich nicht stellt. Was von Bedeutung ist, ist die Frage nach der Änderung der Entropie, wenn das System vom Zustand 1, mit der Entropie S_1, in den Zustand 2, mit der Entropie S_2 übergeht.

Auch gemäß dieser Aussage müsste der Faktor $16\pi*lp^2$ als Normierungsfaktor eingehen!

Die allgemeine Definition einer Entropie-Änderung lautet:

$$dS = k_b \times Ln(w_2/w_1)$$

Dabei bezeichnet w_i die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand i realisiert ist. Bringt man zwei Teilsysteme a und b zusammen, die jeweils in einem Zustand mit der Wahrscheinlichkeit w_a und w_b realisiert sind, so ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit als das Produkt $w = w_a * w_b$.

Damit ergibt sich die Entropie des zusammengeführten Systems zu

$$S = k_b \times Ln(w_a \times w_b) = k_b \times \left(Ln(w_a) + Ln(w_b)\right) = S_a + S_b$$

Wir stellen uns nun vor, dass das Volumen eines Gases auf die Hälfte reduziert wird. Die statistische Wahrscheinlichkeit, dass sich N Atome in einer Hälfte des Volumens befinden beträgt gerade

$w = (1/2)^N$. Damit ergibt sich also für die statistische Definition der Entropie eine Änderung der Entropie bei Halbierung des Volumens von

$dS = k_B * Ln(1/2)^N = -k_B * N * LN(2)$, also proportional dem negativen Logarithmus von 2.

Die Änderung der Entropie dS ist negativ, d.h. die Entropie des Endzustandes ist kleiner als die des Anfangszustandes, da der Endzustand besser geordnet ist.

Derselbe Ansatz mit folgenden Forderungen:

Die sich verteilende Energie je Schale ist konstant E.

Das Volumen wächst mit n^2

Der wahrscheinlichste Zustand ist $E/N = E/n_i^2$

Die Energie wird faktisch in $N = n_i^2$ Portionen aufgeteilt. Nun kann wieder die Wahrscheinlichkeit einer spezifischen Verteilung betrachtet werden. Mit dem normierten Ereignishorizont folgt

zB alle Energieportionen nur im halben Volumen -> $w=(1/2)^N$

oder drittel -> $w=(1/3)^N$

Die dazugehörigen Entropien :

$$S = k_b \times Ln(1/m)^N = -k_b \times N \times Ln(m) \quad = -k_b \times 1/4 \times n_i^2 \times Ln(m)$$

Die so definierte Entropie ist also proportional einem Viertel des Ereignishorizonts.

Der Absolutwert der Entropie gemäß Hawking und Bekenstein findet so eine mögliche Erklärung über den normierten, quantisierten Ereignishorizont.

$$S = \frac{1}{4} \times k_b \times n_i^2$$

Ausgehend von der Entropie lässt sich jetzt die Temperatur definieren:

$$dS = 1/4 \times k_b \times 2 \times n_i \times dn$$

dn ist 2 da sich ni definitonsgemäß immer um 2 ändert.

$$dS = k_b \times n_i$$

Da die beteiligte Energie bekannt ist, kann eine Änderung dQ festgelegt werden:

$$dS = dQ/T$$

$$T=dQ/dS$$

$$T = E_0 \ /(k_b \times n_i)$$

Mit der Ausformulierung der Plank-Energie folgt somit

$$T = \left(\hbar \times c^5 /\gamma\right)^{1/2} /(k_b \times n_i)$$

Die Masse des SL ist proportional ni/2 und der Planckmasse

$$M = m_{pl} \ \times n_i/2$$

$$n_i = 2M / m_{pl}$$

$$n_i = 2M/(\hbar \times c/\gamma)^{1/2}$$

$$T = (\hbar*c^5/\gamma)^{1/2} / (k_B*2M) * (\hbar*c/\gamma)^{1/2}$$

$$T = (\hbar \times c^5/\gamma)^{1/2}/(k_b \times 2 \times M) \times (\hbar \times c \quad /\gamma)^{1/2}$$

$$T = \hbar \times c^3/(2 \times \gamma \times M \times k_b)$$

Zum Vergleich die Hawking-Temperatur:

$$T = \hbar \times c^3/(8 \times \pi \times \gamma \times M \times k_b)$$

Jetzt kann wieder die Strahlungsleistung abgeleitet werden. Allerdings ist die Konstante σ für die Planckära nicht bekannt. Wenn ausgehend von der Quantisierung der SL angenommen wird, dass der Grundwert der Planck-Leistung entspricht, kann σ hergeleitet werden:

$$P = \sigma \times A \times T^4$$

$$P = \sigma \times \left(4 \times \pi \times l_p^2 \times n_i^2\right) \times \ (E_0/(k_b \times n_i))^4$$

$$P = \sigma \times 4\pi/n_i^2 \times 1/k_b^4 \times \hbar^3 \times c^7/\gamma$$

mit P=P0 = c^5/y bei n_i=2 =>

$$\sigma = c^5 \times 4 \times k_b^4 \times \frac{\gamma}{\gamma}/(4\pi \times \hbar^3 \times c^7)$$

$$\sigma = k_b^4/(\pi \times \hbar^3 \times c^2)$$

$$\sigma = 8 * \pi^2 * k_B^4 / (h^3 * c^2)$$

$$\sigma = 8 \times \pi^2 \times k_b^4/(h^3 \times c^2)$$

Damit ergibt sich die quantisierte Form für die Leistung:

$$P = 8 * \pi^2 * k_B^4 / (h^3 * c^2) * 4\pi/n_i^2 * 1/k_B^4 * \hbar^3 * c^7/\gamma$$

$$P = 8 \times \pi^2 \times k_b^4/(h^3 \times c^2) \times 4\pi/n_i^2 \times 1/k_b^4 \times \hbar^3 \times c^7/\gamma$$

$$P = 4 \times \frac{c^5}{\gamma}/n_i^2$$

Nach Einsetzen der Masse folgt

$$M = m_0 \times n_i/2$$

$$n_i = 2M/m_0$$

$$n_i = 2M/(\hbar \times c/\gamma)^{1/2}$$

$$P = \frac{c^5}{\gamma}/M^2 \times \hbar \times c/\gamma$$

$$P = \frac{c^6}{\gamma^2} \times \hbar/M^2$$

$$P = h * c^6/\gamma^2 / (2\pi * M^2)$$

$$P = h \times \frac{c^6}{\gamma^2}/(2\pi \times M^2)$$

Zum Vergleich die Strahlungs-Leistung nach Hawking

$$P = \frac{2 \times \pi^5 \times k_b^4}{15 \times h^3 \times c^2} \times A \times T^4$$

$$A = 16 \times \pi \times \gamma^2 \times M^2/c^4$$

$$T = h \times c^3/(16 \times \pi^2 \times \gamma \times M \times k_b)$$

$$P = h \times c^6/(30720 \times \pi^2 \times \gamma^2 \times M^2)$$

Die Strahlungsleistung ist immer um einen Faktor 48254,8 höher als nach Hawkings Herleitung.

Theoretisch müsste nun der Energieverlust pro Zeiteinheit einer Planckenergie entsprechen, da schwarze Löcher hier nur quantisiert auftreten. Dieser Zusammenhang ist nur dann allgemein erfüllt, wenn gilt

$$E_0 = P \times T = P_0/nh^2 \times T_0 \times nh^2$$

Um das Schwarze Loch komplett zerstrahlen zu lassen währe demnach die Zeit gemäß

$$E/E_0 = N = \frac{nimax}{2} = nh$$

und der Summe der natürlichen Quadratzahlen(= Summe benötigter Zeiten) :

$$S = N \times (N+1) \times (2 \times N + 1) \times 1/6 = \ (2 \times N^3 + 3 \times N^2 + N)/6$$

$$S = \ (N^3 + 3/2 \times N^2 + 1/2 \times N)/3$$

$$S = (a+b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times b^1 + 3 \times a^1 \times b^2 + b^3$$

$$a = N$$

$$b = 1/2$$

$$3 \times S = \ N^3 + 3/2 \times N^2 + 1/2 \times N \quad \text{// +1/4N}$$

$$3 \times S + \tfrac{1}{4}N = \ N^3 + 3/2 \times N^2 + 3/4 \times N \quad \text{// +1/8}$$

$$3 \times S + \frac{1}{4}N + \frac{1}{8} = (N + \tfrac{1}{2})^3$$

$$S = \frac{1}{3} \times \left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{4}N - \tfrac{1}{8}\right)$$

$$T_{ges} = T_0 \times S = T_0 \times \frac{1}{3} \times \left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{4}N - \tfrac{1}{8}\right)$$

$$T_{ges} = T_0 \times S = T_0 \times \frac{1}{3} \times \left(\left(nh + \tfrac{1}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{4}nh - \tfrac{1}{8}\right)$$

Ein schwarzes Loch zerstrahlt in dieser Zeit vollständig, sofern keine Absorption einfallender Energien erfolgt.

Wie zu erwarten war, ist die « Lebensdauer » in erster Linie proportional zu nh^3 und damit zur dritten Potenz der Masse :

$$\tau = 5120 \times \pi \times \gamma^2/c^4/\hbar \times M^3 \quad \text{(halbklassische Rechnung Abk : hk)}$$

umnormiert zu nh

$$\tau/T_0 = 5120 \times \pi \times \gamma^2/c^4/\hbar \times m_0^3 \times nh^3/T_0$$

$$\tau/T_0 = 5120 \times \pi \times \gamma^2/c^4/\hbar \times (\hbar^3 \times c^3/\gamma^3/\hbar/\gamma \times c^5)^{1/2} \times nh^3$$

$$\tau/T_0 = 5120 \times \pi \times \gamma^2/c^4/\hbar \times (\hbar^2 \times c^8/\gamma^4)^{1/2} \times nh^3$$

$$\frac{\tau}{T_0} = 5120 \times \pi \times nh^3 = S_{hk}$$

Durch die völlige Quantisierung kommen Korrekturen hinein, die im halbklassischen Ansatz fehlen.

Ein quantisiertes Schwarzes Loch zerfällt weitaus schneller als nach dem halbklassischen Ansatz !

Für nh = 1 folgt

$$T_{ges} = T_0 \times \frac{\left(\frac{27}{8} - \frac{2}{8} - \frac{1}{8}\right)}{3} = T_0 \times \frac{24/8}{3} = T_0$$

Das kleinstmögliche Schwarze Loch würde unter diesen Umständen innerhalb einer Planckzeit zerstrahlen und vermutlich auch entstehen.

Es ist anzunehmen, dass während der Planckphase des Universums primordiale Schwarze Löcher (als Keime späterer Strukturen) jeder Größe entstanden. Je nach ihrer Größe blieben sie allerdings mehr oder weniger lang im thermodynamischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung. Je mehr das Universum abkühlte desto weniger Schwarze Löcher blieben stabil bzw. wurden neu erzeugt.

Eine Schätzung, welche Masse ein Schwarzes Loch haben musste um jetzt in der Gegenwart (Weltalter 13,75 Mrd J vorausgesetzt) endgültig zu zerfallen, liefert :

$$M = N \times m_0 = 2{,}8903 \times 10^{20} \times 2{,}17644 \times 10^{-8}\ kg = 6{,}29 \times 10^{12} kg$$

Das enspricht einem Planetoiden ($\rho = 5\ g/cm^3$) von etwa 1,3 km Durchmesser ($R_s = 9 \times 10^{-15}$ m).

Der halbklassische Ansatz liefert hingegen

$$M = 1{,}7278 \times 10^{11} kg$$

Das enspricht einem Planetoiden ($\rho = 5\ g/\ cm^3$) von etwa 0,4 km Durchmesser ($R_s = 2{,}5 \times 10^{-16}$ m).

Ein Schwarzes Loch mit der zehnfachen Sonnenmasse bräuchte ca. 4×10^{65} Jahre um komplett zu zerstrahlen, die Gesamtmasse des Universums sogar $5{,}5 \times 10^{130}$ Jahre (das 4×10^{120}-fache seines bisherigen Alters) !

Die Vorhersagen zum Zerfallsprozess unterscheiden sich ausserdem hinsichtlich der maximal zu erwartenden maximalen Strahlungs-Leistung. Während diese im halbklassischen Ansatz über alle Grenzen wächst, wächst sie im quantisierten Ansatz maximal bis zur Planckleistung.

Ausserdem ist die abgestrahlte Energie in diesem Ansatz konstant die Planckenergie. Die Zerfallsrate entwickelt sich annähernd nach einer Kubikwurzel-Formel mit der Zeit.